3.4.13 Povrch válce

Předpoklady: 030412

Př. 1: Válec na antuku má délku 100 cm a průměr 50 cm. Jakou plochu uválí, když se jednou otočí?

Když se válec jednou otočí, uválí plochu, která odpovídá ploše jeho pláště (obdélník o straně výška x obvod podstavy).

$S = 2\pi r \cdot v = 2\pi \cdot 0,25 \cdot 1\,\mathrm{m}^2 = 1,57\,\mathrm{m}^2$

Na jedno otočení válec uválí $1,57\,\mathrm{m}^2$ plochy.

Př. 2: Které vzorečky jsou správné vzorce pro povrch válce? Které vzorečky jsou na první pohled špatné?

a) $S = 2\pi(r+v) + 2\pi r^2$ b) $S = 2\pi r(r+v)$ c) $S = 2\pi r + 2\pi r v$

d) $S = 2\pi r^2 v$ e) $S = 2\pi r^2 + \pi^2 r^2$ f) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

a) $S = 2\pi(r+v) + 2\pi r^2$ - určitě špatný vzorec, jeho první část $2\pi(r+v)$ není součin vzdáleností $\Rightarrow$ nemůže jít o vzorec pro plochu.

b) $S = 2\pi r(r+v) = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ - správný vzorec, obě části jsou součin dvou délek (tedy vzorečky pro nějakou plochu), $2\pi r^2$ - obsah dvou podstav, $2\pi r v$ - obsah pláště.

c) $S = 2\pi r + 2\pi r v$ - určitě špatný vzorec, jeho první část $2\pi r$ je pouze obvod $\Rightarrow$ nemůže jít o vzorec pro plochu.

d) $S = 2\pi r^2 v$ - určitě špatný vzorec, jde o součin tří délek - je to vzorec pro objem.

e) $S = 2\pi r^2 + \pi^2 r^2$ - určitě špatný vzorec, neobsahuje výšku válce, na které musí jeho povrch určitě záviset.

f) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ - $S = 2\pi r(r+v) = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ - správný vzorec, obě části jsou součin dvou délek (tedy vzorečky pro nějakou plochu), $2\pi r^2$ - obsah dvou podstav, $2\pi r v$ - obsah pláště.

Povrch válce je dán vzorcem $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r+v)$.

Př. 3: Jirka vystřihl z listu papíru formátu A4 síť válce o poloměru 3 cm a výšce 6 cm a vzteká se, že je to hrozné plýtvání. Kolik procent z celé plochy listu využil?

Povrch válce: $S = 2\pi r(r+v) = 2\pi \cdot 3(3+6)\,\mathrm{cm}^2 = 170\,\mathrm{cm}^2$

Plocha papíru A4 (rozměry 21 x 29,7): $S = ab = 21 \cdot 29,7\ \text{cm}^2 = 624\,\text{cm}^2$.

624 ... 100 %
170 ... x

$$\frac{x}{170} = \frac{100}{624} \qquad / \cdot 170$$
$$x = \frac{100}{624} \cdot 170 = 27,2\%$$

Je to plýtvání, Jirka využil jen 27,2 % plochy papíru.

Př. 4: Válcový taburet (sedátko) má průměr 45 cm a výšku 49 cm. Je možné ušít na něj látkový potah z obdélníkového zbytku látky o rozměrech 180 cm x 50 cm?

Nepotřebujeme povrch válce, potřebujeme zjistit, zda se střih potahu vejde na látku.
Střih odpovídá síti válce s jednou podstavou (na spodní část taburetu se potah nedělá) $\Rightarrow$ zjišťujeme rozměry.
Obvod kruhu: $o = \pi d = \pi \cdot 45\ \text{cm} = 141,4\,\text{cm}$.
Musíme na látku najednou umístit kruh o průměru 45 cm a obdélník o stranách 49 x 141,4 cm.
Dvě možnosti:

- vedle sebe $\Rightarrow$ potřebujeme obdélník 141,4 x 94 cm,
- za sebou $\Rightarrow$ potřebujeme obdélník 186,4 x 49 cm.

Látkový potah z obdélníkového zbytku látky o rozměrech 180 x 50 cm neušijeme.

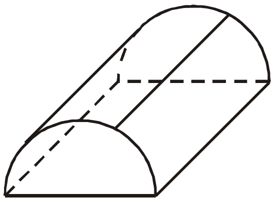
Př. 5: Plechovka na šproty má tvar válce o průměru 10,3 cm a výšce 2,5 cm. Plechovka je vyrobena z plechu o hustotě $7800\ \text{kg/m}^3$ a tloušťce 0,5 mm. Urči její hmotnost.

Nejdříve spočteme povrch válce, který odpovídá ploše plechu potřebného na výrobu plechovky.
$S = 2\pi r(r+v) = 2\pi \cdot 5,15(5,15+2,5)\ \text{cm}^2 = 248\,\text{cm}^2$
Plech má plochu $248\,\text{cm}^2$ a tloušťku 0,5 mm $\Rightarrow$ jeho objem:
$V = S \cdot v = 248 \cdot 0,05\ \text{cm}^3 = 12,4\,\text{cm}^3 = 0,0000124\,\text{m}^3$.

Hmotnost získáme, když objem vynásobíme hustotou:
$m = V\rho = 0,0000124 \cdot 7800\ \text{kg} = 0,0967\text{kg} = 96\,\text{g}$

Plechovka na šproty váží 96 g.

Př. 6: Petra si pro svou industriální cukrárnu koupila starou skladištní halu ve tvaru poloviny válce o průměru 7 m a délce 15 m. Hala potřebuje dvě vrstvy nátěru o vydatnosti $7\,\text{m}^2/\text{kg}$ v jedné vrstvě. Barva se prodává v balení po 0,7 kg (139 Kč), 2,5 kg (459 Kč) a 9 kg (1652 Kč). Doporuč, jak nejvhodněji nakoupit potřebnou barvu.



Povrch haly, který musí Petra nechat natřít, představuje přesně polovinu povrchu celého válce. Povrch je nutné natřít dvakrát $\Rightarrow$ natíraný povrch odpovídá velikosti povrchu válce o průměru podstavy 7 m a výšce 15 m.
Povrch válce: $S = 2\pi r(r+v) = 2\pi \cdot 3{,}5(3{,}5+15)\,\text{m}^2 = 407\,\text{m}^2$.
Potřebné množství barvy: $407:7\,\text{kg} = 58{,}1\,\text{kg}$.

Větší balení barvy je výhodnější (i když rozdíl mezi 9 kg a 2,5 kg je minimální) $\Rightarrow$ snažíme se co největší množství barvy nakoupit v 9 kg baleních.
$58{,}1:9 = 6{,}\overline{4}$ $\Rightarrow$ 6 balení po 9 kg.
Barva v plechovkách 9 kg: $6\cdot 9\,\text{kg} = 54\,\text{kg}$ $\Rightarrow$ zbývá nakoupit ještě 4,1 kg barvy
$\Rightarrow$ 1 balení po 2,5 kg $\Rightarrow$ zbývá $4{,}1-2{,}5 = 1{,}6\,\text{kg}$
$\Rightarrow$ dvě možnosti:

- 1 balení 2,5 kg barvy za 459 Kč,
- 3 balení 0,7 kg barvy za $3\cdot 139 = 417$ Kč (levnější).

$\Rightarrow$ na první pohled se zdá nejvýhodnější variantou nákupu barvy: 6 kusů 9 kg, 1 kus 2,5 kg a 3 kusy 0,7 kg za $6\cdot 1652 + 459 + 3\cdot 139 = 10\,788$ Kč.
Problém s řešením: 0,5 kg barvy zbude, rozdíly v cenách jsou malé $\Rightarrow$ zkusíme jiné rozdělení.

58,1 kg barvy zkusíme nakoupit v balení o hmotnosti 2,5 kg.
$58{,}1:2{,}5 = 23{,}24$ $\Rightarrow$ 23 kusů barvy 2,5 kg o hmotnosti 57,5 kg $\Rightarrow$ zbývá ještě nakoupit 0,6 kg barvy $\Rightarrow$ stačí 1 plechovka 0,7 kg.
Další varianta: 23 kusů 2,5 kg, 1 kus 0,7 kg za $23\cdot 459 + 1\cdot 139 = 10\,696$ Kč (překvapivě trochu levnější).

Z našich výpočtů se zdá, že nejvýhodnějším způsobem jak nakoupit barvu, je nákup 23 balení o hmotnosti 2,5 kg a jedné plechovky o hmotnosti 0,7 kg za celkovou cenu 10 696 Kč.

Dodatek: Ve skutečnosti ani druhé řešení není nejvýhodnější, protože je možné koupit barvu i takto: 5 kusů 9 kg, 5 kusů 2,5 kg a 1 kus 0,7 kg za $5\cdot 1652 + 5\cdot 459 + 1\cdot 139 = 10\,694$ Kč, jak je možné se podívat v přiložené excelovské tabulce. Ani ta však nezachycuje všechny možnosti, protože předpokládá, že je automaticky lepší nakoupit zbytek barvy ve formě 2,5 kg balení. Pokud bychom probírali jednotlivé varianty i na této další úrovni, příklad by se ještě o jednu úroveň zkomplikoval.

Ve skutečnosti se takto podrobně podobnou úlohou nikdo nezabývá a první řešení se bere jako nejlepší.

Pedagogická poznámka: Pokud někoho z žáků napadne, že první způsob výpočtu nemusí nutně znamenat nejvýhodnější výsledek, zaslouží velké ocenění. Dopočítání příkladu na úrovni uvedené v tabulce je dobrou úlohou navíc, nejlépe při zpracování v tabulkovém procesoru.

Př. 7: Celá plechovka z příkladu 5 i s obsahem (brutto) váží 263 g, samotný obsah (netto) 160 g. Vysvětli rozdíly.

Hmotnost plechovky z vážení: $263-160=103\ \text{g}$. Což je větší hodnota, než jsme spočítali v příkladu 5.
Možné důvody:

- v místech, kde je plechovka spojená, jsou až tři vrstvy plechu,
- tloušťka plechu neodpovídá zadání v příkladu 5 (ve skutečnosti je tlustší),
- obsah plechovky je těžší než deklarovaných 160 g,
- hustota kovu, ze kterého je plechovka vyrobena, je větší než $7\,800\ \text{kg/m}^3$,
- …

Shrnutí: Povrch válce je dán vzorcem $S=2\pi r^2+2\pi rv=2\pi r\left(r+v\right)$ (dva kruhy a obdélník).